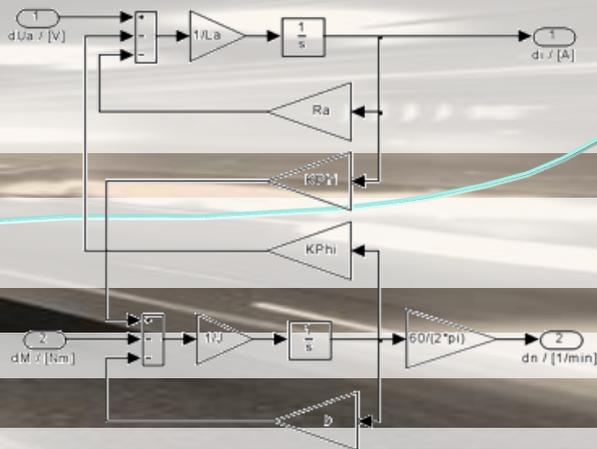
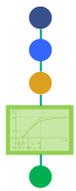


Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Vorlesung: Modellbildung und Identifikation

Kapitel 5: Identifikation mit parametrischen Modellen





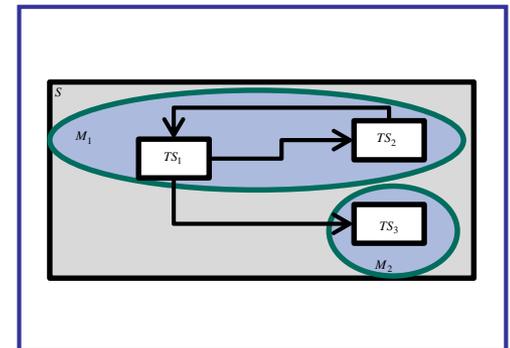
1. Einführung

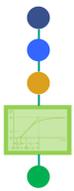
1. Motivation
2. Organisatorisches
3. Übersicht
4. Anwendung von Modellen
5. Klassifikation
6. Vorgehen bei der Modellbildung
7. Validierung und Verifikation



2. Strukturierung

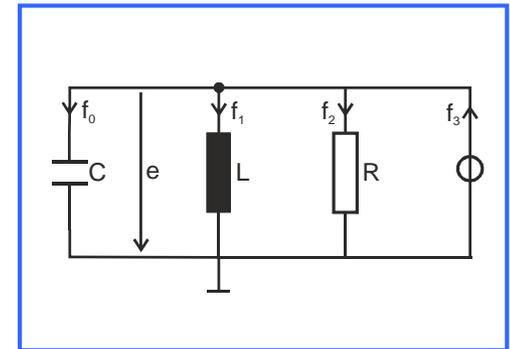
1. Abgrenzung
2. Strukturiertes System
3. Kausale Modellierung
4. Kopplungsanalyse
5. Strukturierung mit Matlab/Simulink
6. Objektorientierte Modellierung





3. Generalisierte Ersatzschaltbilder

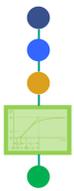
1. Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder
2. Methode der generalisierten Variablen
3. Grundlegende Systemelemente
4. Methode der generalisierten Netzwerkanalyse



4. Variationsanalyse

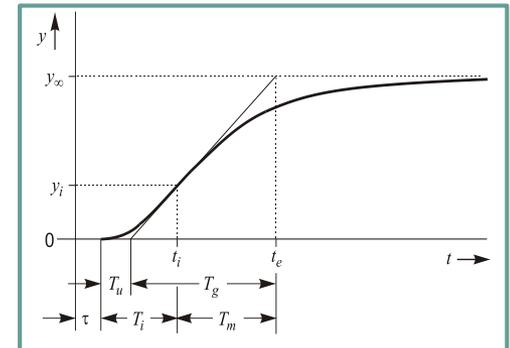
1. Methode der Variationsanalyse
2. Aufstellen der Zustandsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{e_j}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{e_j}} = F_j^{(Q)} - F_j^{(F)}$$
$$L = T^* - U$$



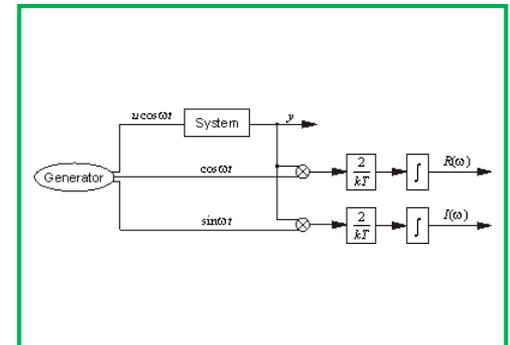
5. Identifikation mit parametrischen Modellen

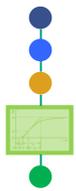
1. Übersicht
2. Kennwertermittlung
3. Least-Square-Verfahren für statische Prozesse
4. Least-Square-Verfahren für dynamische Prozesse
5. Generalized-Least-Square-Methode
6. Methode der Hilfsvariablen
7. Nichtlineare Methoden



6. Identifikation mit nichtparametrischen Modellen

1. Frequenzganganalyse
2. Korrelationsanalyse





5.1 Übersicht

5.1.1 Methoden zur Parameterermittlung (1)

Ausgangspunkt:

- Ergebnis des Idealisierungsschrittes aus Kapitel 3 und 4

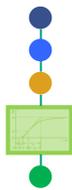
$$\underline{0} = \underline{a}(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, u_1, \dots, u_p)$$

$$\underline{y} = \underline{h}(x_1, \dots, x_n)$$

- d.h. der funktionale Zusammenhang \underline{a} , \underline{h} ist bekannt
- Die Ordnung n des Systems ist bekannt.

noch unbekannt:

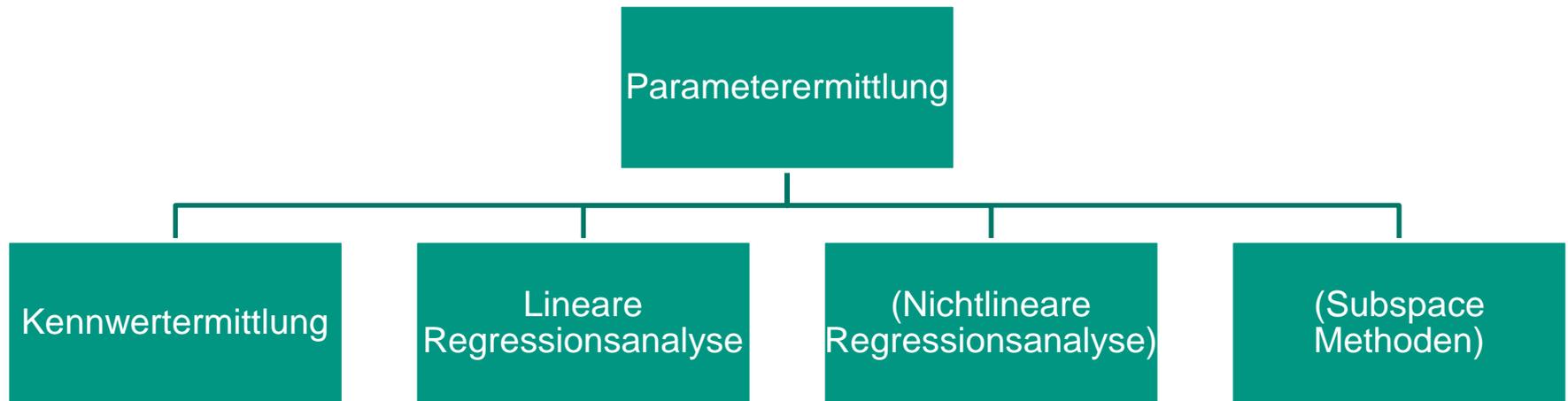
- Parameter $\underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots]^T$ des Systems

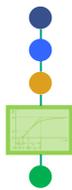


5.1 Übersicht

5.1.1 Methoden zur Parameterermittlung (2)

Ziel: Bestimmung der unbekannt Parameter aus Messungen





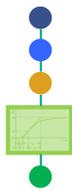
5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (1)

Voraussetzung: Die Parameter müssen aus den Messungen identifizierbar sein.
⇒ Anregung des Systems über die Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$
⇒ Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ und Ausgangsgrößen $\underline{y}(t)$ seien messbar

Beispiel:

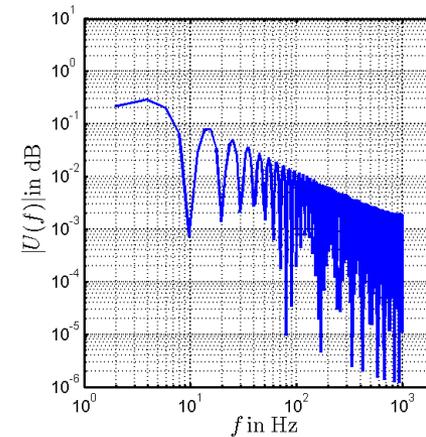
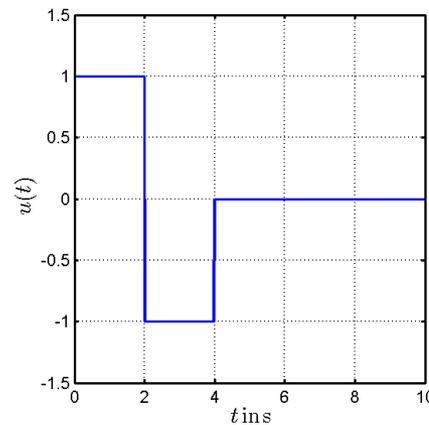
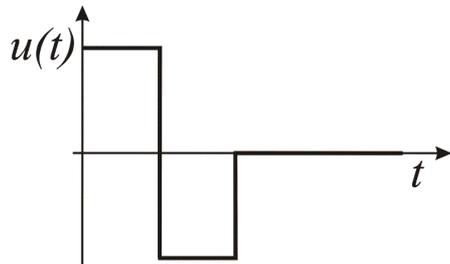
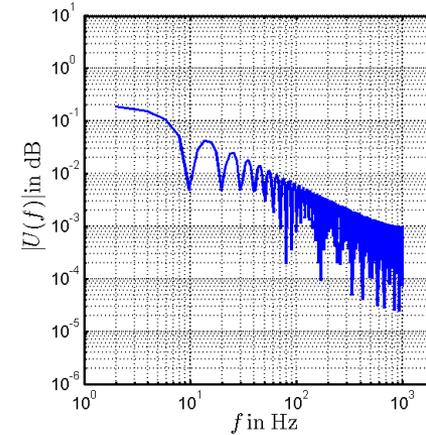
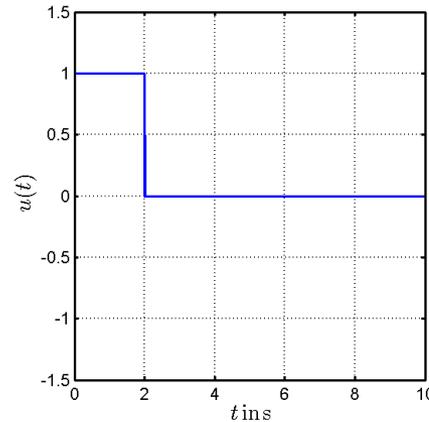
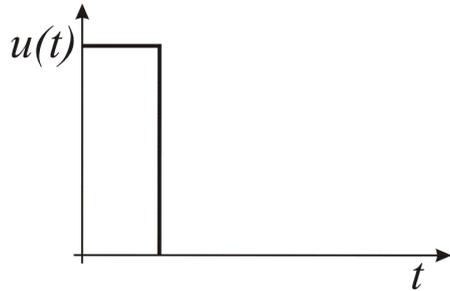


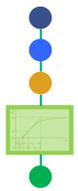


5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (2)

nichtperiodische Signale:

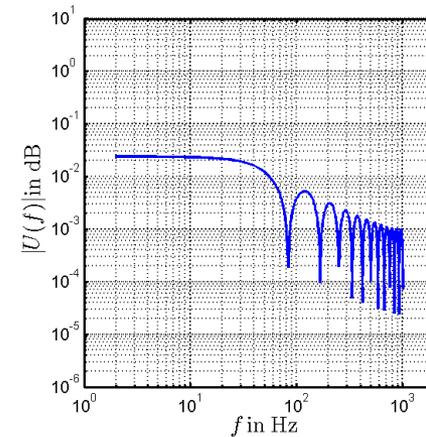
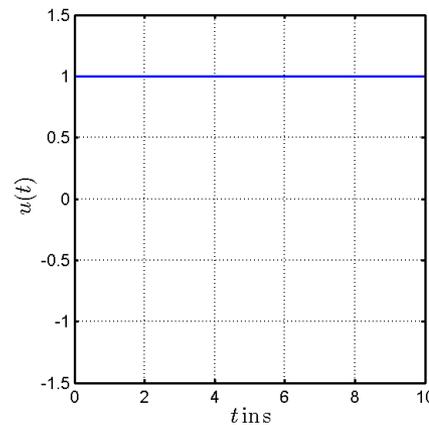
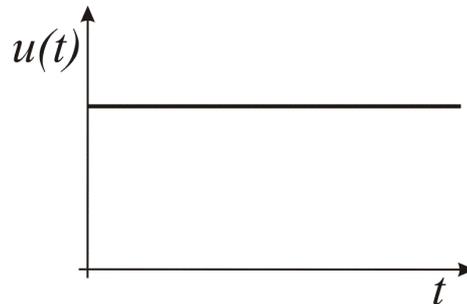
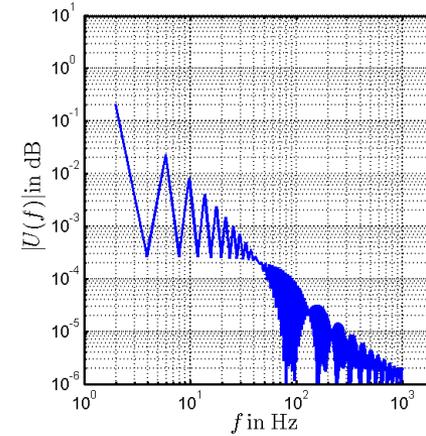
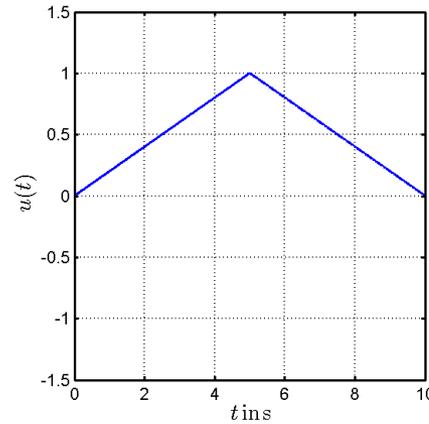
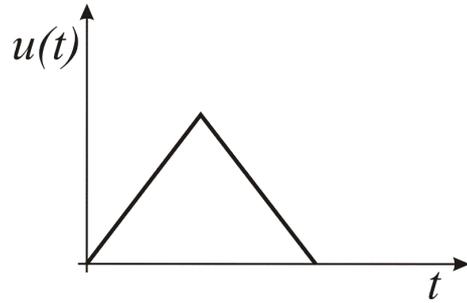


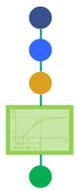


5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (2)

nichtperiodische Signale:

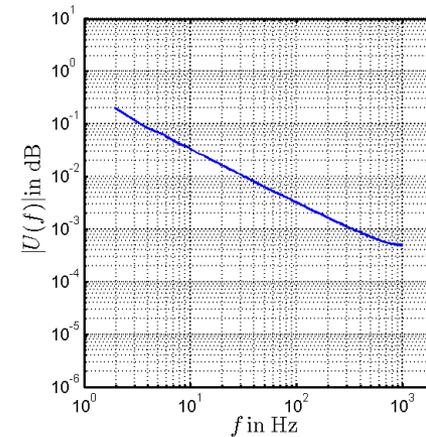
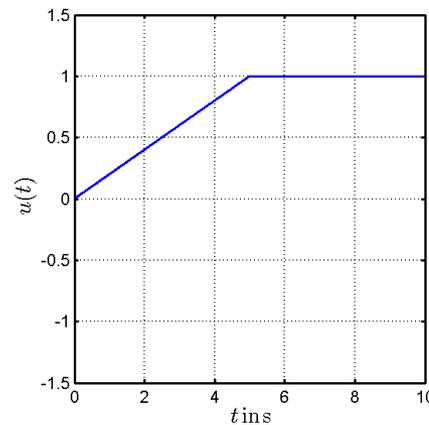
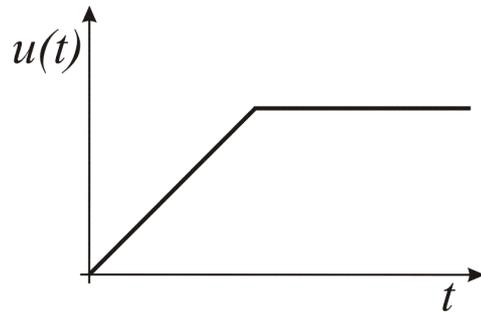
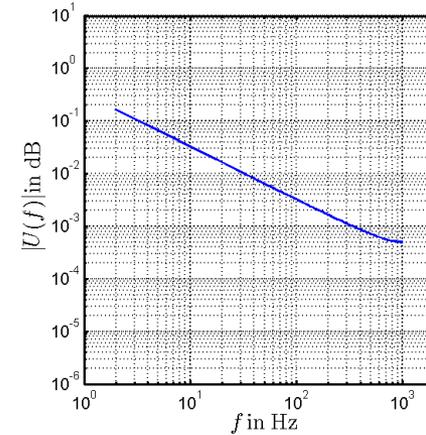
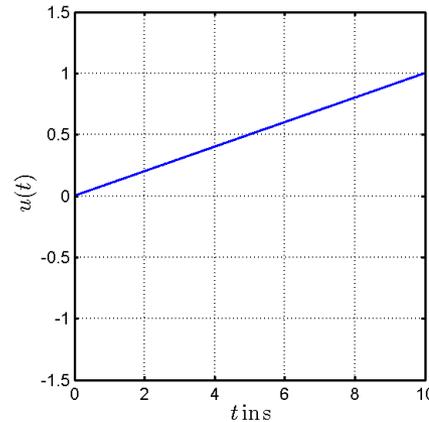
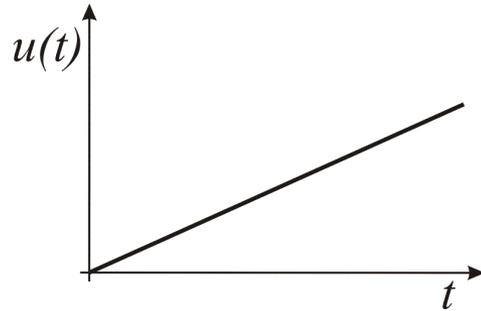


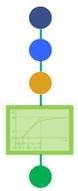


5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (3)

nichtperiodische Signale:

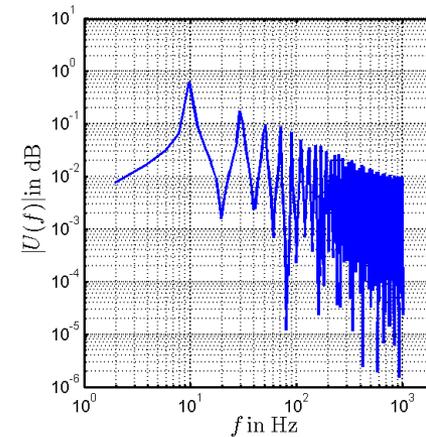
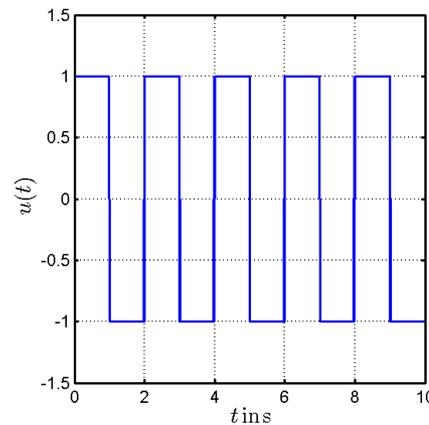
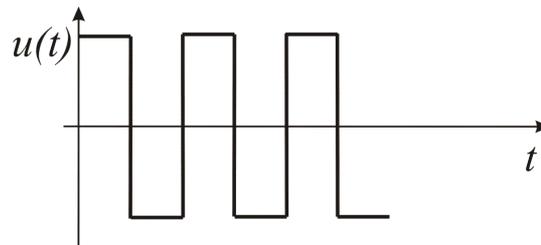
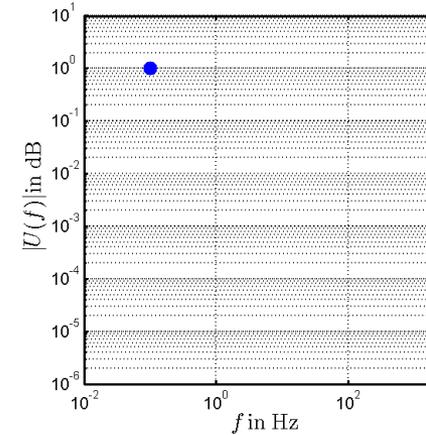
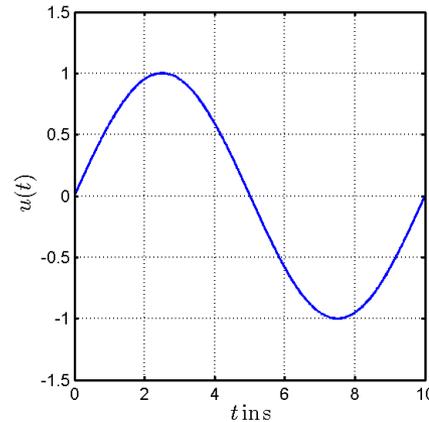
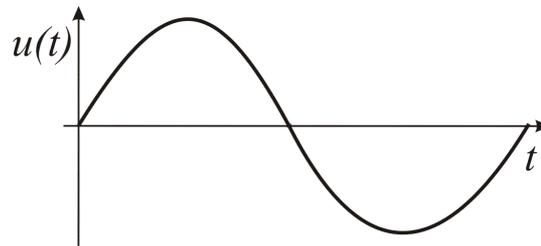


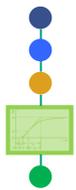


5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (4)

periodische Signale:
monofrequent





5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (5)

stochastischer Prozess:

Ein stochastischer Prozess $\Psi(t, \omega)$ ist die Gesamtheit aller Musterfunktionen $x_i(t)$, die den einzelnen Elementarereignissen ω_i eines Zufallsexperimentes zugeordnet werden. Durch Betrachtung für ein spezielles ω_i ergibt sich demzufolge gerade die Musterfunktion, während man zu einem festen Zeitpunkt eine Zufallsvariable $x(t_i)$ bilden kann:

$$\Psi(t, \omega_i) = x_i(t) \quad \text{Musterfunktion,}$$

$$\Psi(t_i, \omega) = x(t_i) \quad \text{Zufallsvariable.}$$

Verteilungsfunktion:

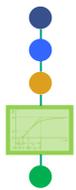
$$F_x(x_1, t_1) := P(x(t_1) \leq x_1)$$

Dichtefunktion:

$$p_x(x_1, t_1) := \frac{\partial}{\partial x_1} F_x(x_1, t_1)$$

Erwartungswert:

$$E\{x(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_x(x_1, t_1) dx_1$$



5.1 Übersicht

5.1.2 Anregungssignale (6)

Autokorrelationsfunktion (AKF) bei zwei Zufallsvariablen $x(t_1)$ und $x(t_2)$ aus einem Prozess:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{xx}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) bei zwei Zufallsvariablen $x(t_1)$ und $y(t_2)$ aus verschiedenen Prozessen:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_1 p_{xy}(x_1, y_1, t_1, t_2) dx_1 dy_1$$

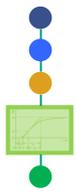
stationärer stochastischer Prozess:

Ein stochastischer Prozess heißt stationär, wenn sich die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen durch Verschiebung um beliebiges Δt nicht ändert:

$$F(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = F(x_1, t_1 + \Delta t, \dots, x_n, t_n + \Delta t) \quad \forall \Delta t$$

Die Korrelationsfunktionen stationärer Prozesse hängen dann nicht mehr von den einzelnen Zeitpunkten, sondern nur noch von der Zeitdifferenz ab:

z.B. AKF:
$$r_{xx}(t_1, t_2) = r_{xx}(t_2 - t_1) = r_{xx}(\tau)$$



5.1 Übersicht

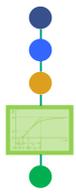
5.1.2 Anregungssignale (7)

ergodischer stochastischer Prozess:

Ein stationärer stochastischer Prozess heißt ergodisch, wenn der Erwartungswert $E\{x(t_1)\}$ als Ensemblemittelwert mit Wahrscheinlichkeit 1 mit dem zeitlichen Mittelwert einer beliebigen Musterfunktion $x_i(t)$ übereinstimmt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_x(x_1, t_1) dx_1 .$$

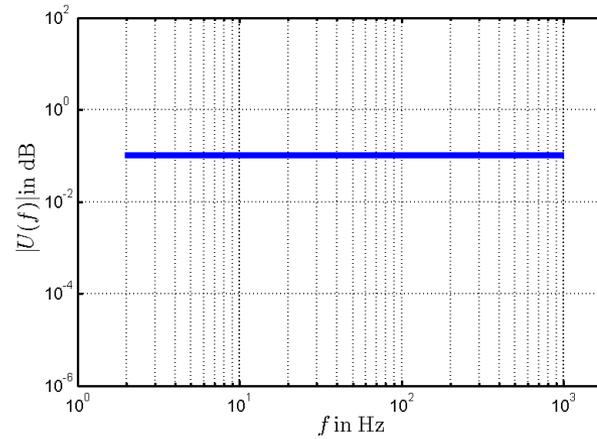
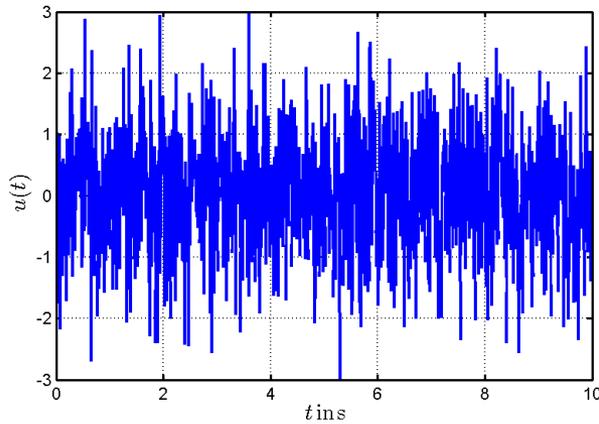
	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
Erwartungswert	$E\{x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$	$E\{x\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N x(k)$
AKF	$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt$	$r_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N x(k) x(k+\tau)$
KKF	$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t+\tau) dt$	$r_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N x(k) y(k+\tau)$



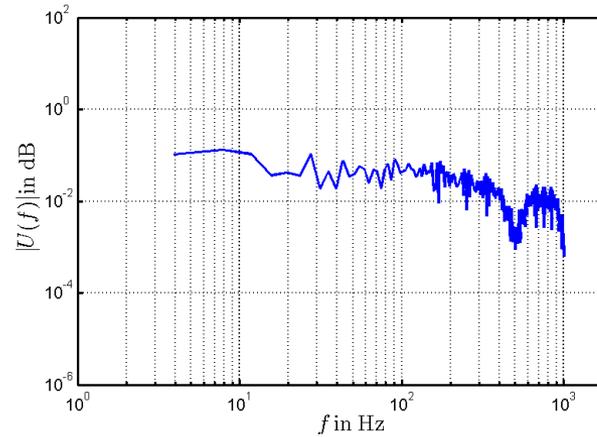
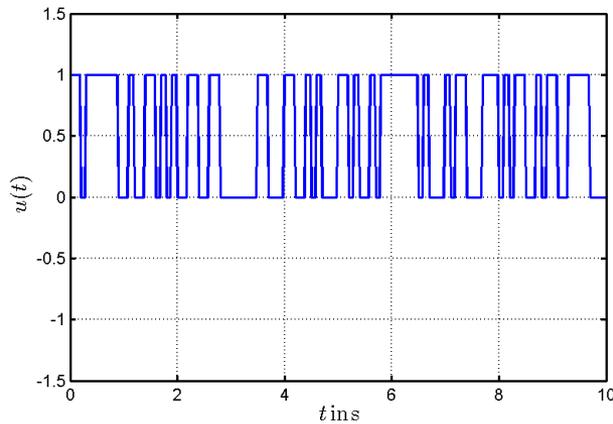
5.1 Übersicht

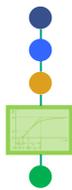
5.1.2 Anregungssignale (8)

weißes Rauschen



pseudobinäres Rauschen





5.2 Kennwertermittlung

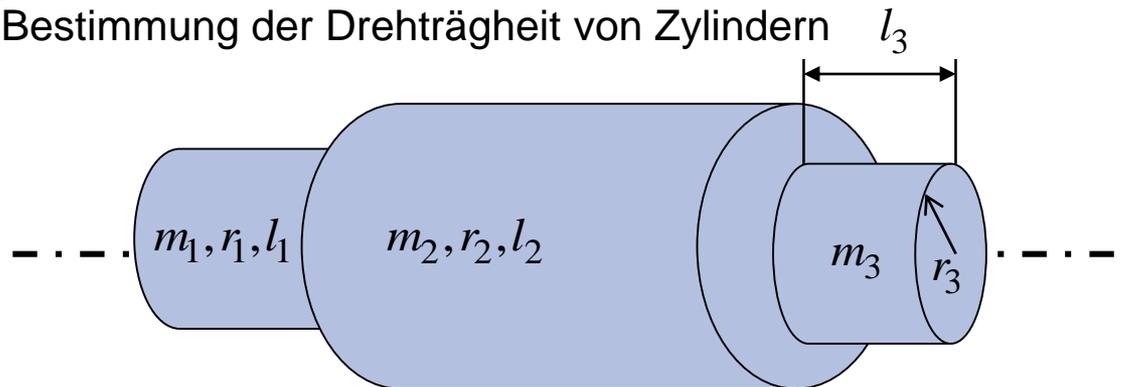
5.2.1 Nutzung physikalischer Grundbeziehungen

Vorgehen:

Rückführung aller unbekannt Parameter auf bekannte **Grundkonstanten** der Physik oder leicht messbare Konstanten.

Beispiel:

Bestimmung der Drehträgheit von Zylindern



für Einzelzylinder gilt: $J_i = \frac{1}{2} m r_i^2$

für den Gesamtzylinder gilt: $J = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m r_i^2$

Problem: Rückführung auf Grundkonstanten tlw. schwierig

5.2 Kennwertermittlung

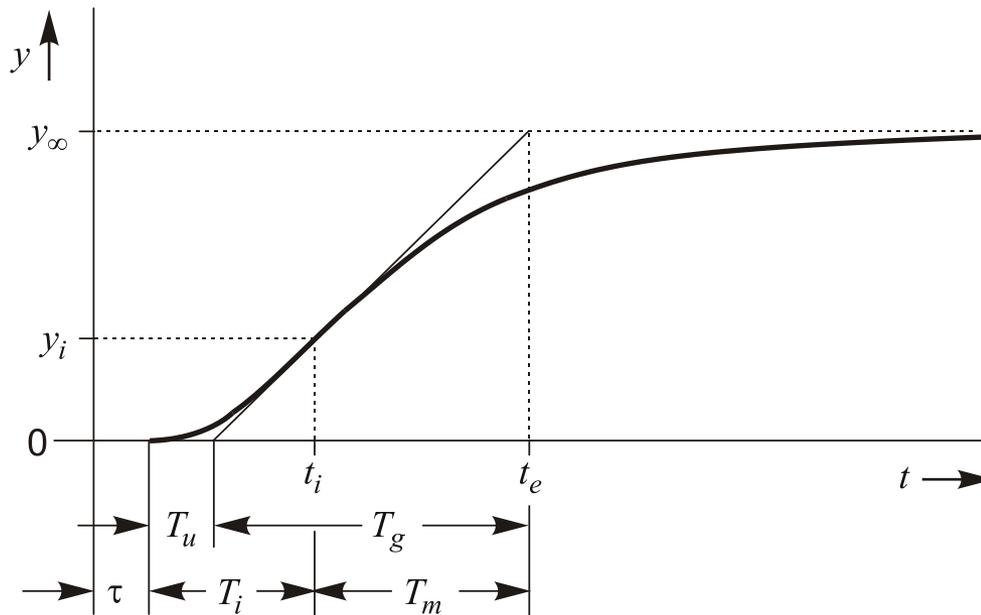
5.2.2 Bestimmung der Parameter aus der Sprungantwort (Strejc) (1)

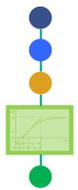
Randbedingung:

System weist aperiodische Sprungantwort auf und lässt sich durch Verzögerungsglied n-ter Ordnung mit Totzeit approximieren:

$$G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^n} e^{-\tau s}$$

Bestimmung charakteristischer Kennwerte aus der gemessenen Sprungantwort $y(t)$ für $u = \sigma(t)$





5.2 Kennwertermittlung

5.2.2 Bestimmung der Parameter aus der Sprungantwort (Strejc) (2)

charakteristische Kennwerte stehen in folgendem Zusammenhang:

n	$\frac{T_g}{T_1'}$	$\frac{T_u}{T_2'}$	$\frac{T_u}{T_g}$	$\frac{T_i}{T_3'}$	$\frac{y_i}{y_\infty}$	$\frac{T_m}{T_4'}$	$\frac{T_m}{T_g}$
1	1	0	0	0	0	1	1
2	2,718	0,282	0,104	1	0,204	2,000	0,736
3	3,695	0,805	0,218	2	0,323	2,500	0,677
4	4,463	1,425	0,319	3	0,353	2,888	0,674
5	5,199	2,100	0,410	4	0,371	3,219	0,629
6	5,699	2,811	0,493	5	0,384	3,510	0,616
7	6,226	3,549	0,570	6	0,394	3,775	0,606
8	6,711	4,307	0,642	7	0,401	4,018	0,599
9	7,146	5,081	0,709	8	0,407	4,245	0,593
10	7,590	5,869	0,773	9	0,413	4,458	0,587

5.2 Kennwertermittlung

5.2.2 Bestimmung der Parameter aus der Sprungantwort (Strejc) (3)

Ermittlung der unbekannt Parameter K, T, τ, n wie folgt:

1 Bestimmung von K :
$$K = \frac{y_\infty}{u_\infty}$$

2 Nutzung der Wendetangente $(t_i, y_i) \rightarrow t_e, T_g, T_m$ ablesbar

3 Ermittlung der Systemordnung n

$$\frac{T_m}{T_g}; \frac{y_i}{y_\infty} \text{ bestimmen}$$

\rightarrow liefert n aus Tabelle

4 Ermittlung der Totzeit τ

$$\text{aus } \frac{T_m}{T_g}; \frac{T_u}{T_g}$$

$$\rightarrow T_u$$

$$\rightarrow T_i = T_u + T_g - T_m$$

$$\rightarrow \tau = t_e - T_g - T_u = t_e - T_i - T_m$$

5.2 Kennwertermittlung

5.2.2 Bestimmung der Parameter aus der Sprungantwort (Strejc) (4)

5 Ermittlung der Zeitkonstanten T

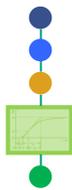
mit bekanntem n : $\frac{T_g}{T_1}, \frac{T_u}{T_2}, \frac{T_i}{T_3}, \frac{T_m}{T_4}$ ablesbar

$$\rightarrow T_1', T_2', T_3', T_4'$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{4}(T_1' + T_2' + T_3' + T_4')$$

6 Validierung

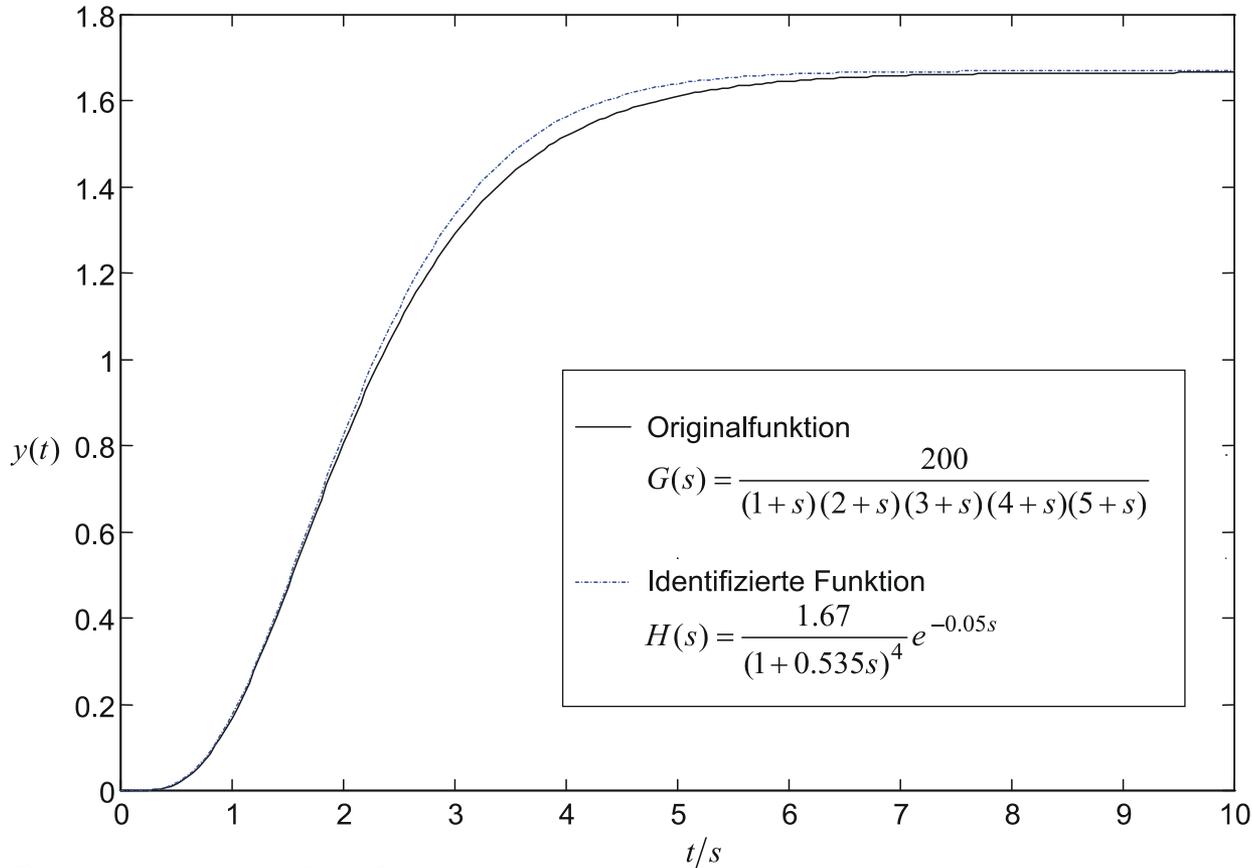
Sonderfälle:



5.2 Kennwertermittlung

5.2.2 Beispiel

Identifikation nach Strejc



Probleme des Verfahrens:

- Das Verfahren ist nur anwendbar, wenn die Messung wenig verrauscht ist.
- Die graphische Bestimmung der Wendetangente ist fehleranfällig.

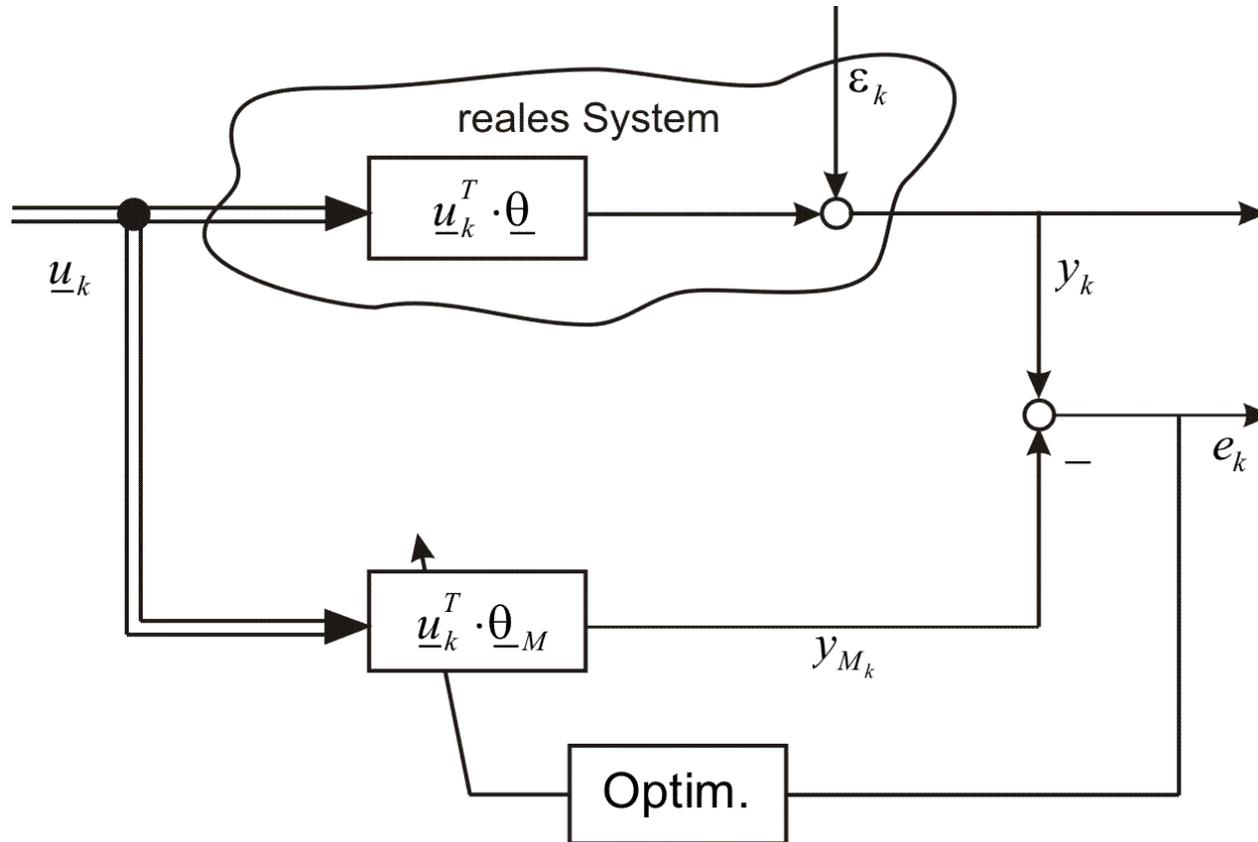


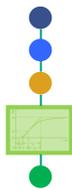
5.3

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.1

Schätzung mehrerer Parameter eines stat. determ. Systems mit LS-Verfahren (1)





5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.1 Schätzung mehrerer Parameter eines stat. determ. Systems mit LS-Verfahren (2)

- p linear unabhängige diskrete Eingangsgrößen

$$\underline{u}_k^T = [u_{1,k}, \dots, u_{p,k}]$$

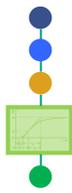
- p Systemparameter

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

- deterministische Störung

Messgleichung

$$y_k = \underline{u}_k^T \cdot \underline{\theta} + \varepsilon_k$$



5.3

5.3.1

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

Schätzung mehrerer Parameter eines stat. determ. Systems mit LS-Verfahren (3)

5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.1 Schätzung mehrerer Parameter eines stat. determ. Systems mit LS-Verfahren (4)

LS-Schätzer in Blockverarbeitung

$$\hat{\underline{\theta}}_M = \underbrace{\left[\underline{U}^T \underline{U} \right]^{-1}}_{\substack{\underline{P}_N \\ (p,p)}} \underbrace{\underline{U}^T \underline{y}}_{\substack{\underline{b}_N \\ (p,1)}}$$

$$\underline{U} := \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_N^T \end{bmatrix}$$

Anmerkungen:

- $\underline{P}_N \underline{U}^T$ heißt Moore-Penrose-Pseudo-Inverse.

- \underline{P}_N muss invertierbar sein.

d.h. es müssen p lineare unabhängige Zeilen/Spalten vorliegen:

α) $N \geq p$

β) geeignete Wahl von Anregungssignalen



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.1 Schätzung mehrerer Parameter eines stat. determ. Systems mit LS-Verfahren (5)

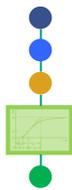
Schätzfehler:

$$\underline{\tilde{\theta}} = \underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta}$$

$$\underline{\tilde{\theta}} = \left[\underline{U}^T \underline{U} \right]^{-1} \underline{U}^T \underline{y} - \underline{\theta} \quad \text{mit} \quad \underline{y} = \underline{u}^T \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$$

$$= \left[\underline{U}^T \underline{U} \right]^{-1} \underline{U}^T \underline{\varepsilon}$$

⇒ Der Fehler hängt nur von der Störung $\underline{\varepsilon}$ ab.



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Rekursive LS-Schätzung für stat. determ. Systeme (1)

Blockverarbeitung insbesondere bei großem N ungünstig:

- a) Speicherbedarf für Daten-Matrix
- b) Große Matrixinversionen

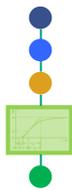
Ziel: rekursives Verfahren: d.h. schrittweise Verbesserung der Schätzwerte für $\underline{\theta}$ unter Hinzunahme **einer** neuen Messung.

hierzu notwendig: Index für Schätzwerte

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \underline{P}_N \cdot \underline{b}_N$$

gesuchte Rekursionsbeziehung:

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \underline{f}(\hat{\underline{\theta}}_{N-1})$$



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Rekursive LS-Schätzung für stat. determ. Systeme (2)

- aus der LS-Schätzung sind folgende Vektoren und Matrizen bekannt:

$$\underline{P}_N^{-1} = \sum_{k=1}^N \underline{u}_k \cdot \underline{u}_k^T = \left[\sum_{k=1}^{N-1} \underline{u}_k \cdot \underline{u}_k^T \right] + \underline{u}_N \cdot \underline{u}_N^T \stackrel{!}{=} \underline{P}_{N-1}^{-1} + \underline{u}_N \cdot \underline{u}_N^T, \quad (1)$$

$$\underline{b}_N = \sum_{i=1}^N \underline{u}_i \cdot y_i = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \underline{u}_i \cdot y_i \right] + \underline{u}_N \cdot y_N \stackrel{!}{=} \underline{b}_{N-1} + \underline{u}_N \cdot y_N, \quad (2)$$

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \underline{P}_N \cdot \underline{b}_N \quad (3)$$



5.3

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2

**Rekursive LS-Schätzung für stat. determ.
Systeme (3)**

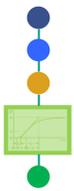


5.3

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2

**Rekursive LS-Schätzung für stat. determ.
Systeme (4)**



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Rekursive LS-Schätzung für stat. determ. Systeme (5)

- für den Schätzwert des Parametervektors gilt also:

Neuer Schätzwert = alter Schätzwert +
Korrekturfaktor • (neuer Messwert - verbesserter Messwert auf Basis
des alten Schätzwerts).

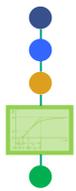
- rekursive Gleichungen der LS-Schätzung

$$\underline{P}_i = \underline{P}_{i-1} - \underline{P}_{i-1} \cdot \underline{u}_i \cdot \left(1 + \underline{u}_i^T \cdot \underline{P}_{i-1} \cdot \underline{u}_i\right)^{-1} \cdot \underline{u}_i^T \cdot \underline{P}_{i-1}$$

$$\underline{k}_i = \underline{P}_{i-1} \cdot \underline{u}_i \cdot \left(1 + \underline{u}_i^T \cdot \underline{P}_{i-1} \cdot \underline{u}_i\right)^{-1}$$

$$= \underline{P}_i \cdot \underline{u}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\hat{\underline{\theta}}_i = \hat{\underline{\theta}}_{i-1} + \underline{k}_i \cdot \left(y_i - \underline{u}_i^T \cdot \hat{\underline{\theta}}_{i-1}\right)$$



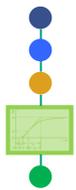
5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Rekursive LS-Schätzung für stat. determ. Systeme (6)

■ Anmerkungen zur rekursiven LS-Schätzung:

- Es müssen Anfangswerte für $\hat{\underline{\theta}}_0$ und \underline{P}_0 vorgegeben werden.
- Für ein beliebiges endliches $\hat{\underline{\theta}}_0$ und \underline{P}_0 mit großen Diagonalelementen ist die Konvergenz des Verfahrens sichergestellt (z.B. $\hat{\underline{\theta}}_0 = \underline{0}$ und $\underline{P}_0 = 10^6 \cdot \underline{I}$).
- \underline{P}_i stellt eine bezüglich ihrer Elemente abnehmende Folge von Matrizen dar. Dadurch wird \underline{k}_i immer kleiner und der Einfluss neu hinzugekommener Messwerte auf den Schätzwert immer geringer.

Abhilfe: endliches Gedächtnis



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Rekursive LS-Schätzung für stat. determ. Systeme (7)

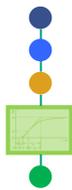
■ Anmerkungen zur Rekursiven LS-Schätzung:

■ rekursives Verfahren erfordert

- geringen *Speicherbedarf*, da nur die jeweils neu anfallenden Messwerte zwischengespeichert werden müssen.

- geringer *Rechenaufwand*, da zur Berechnung neuer Schätzwerte keine Matrizeninversionen durchgeführt werden müssen (der Ausdruck $1 + \underline{u}_i^T \cdot \underline{P}_{i-1} \cdot \underline{u}_i$ ist ein Skalar).

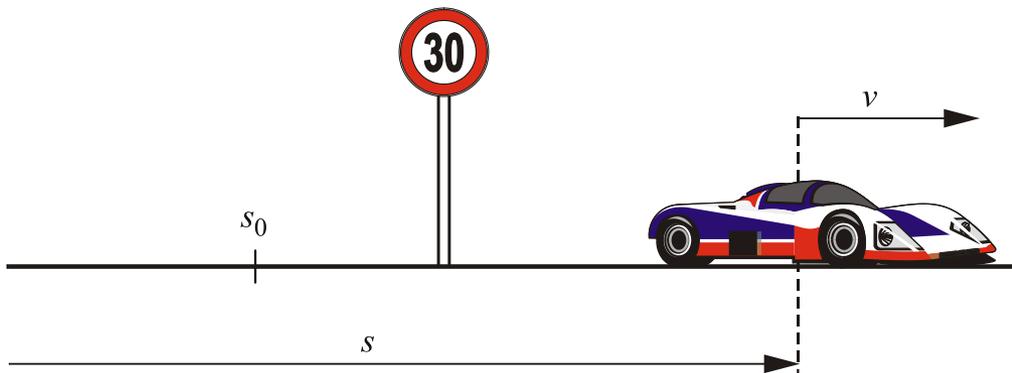
- Im Fall *zeitlich begrenzter Datenmengen* kann die nicht-rekursive Form günstiger sein.



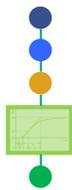
5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Beispiel (1)

Ein KFZ bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer Tempo 30-Zone gemäß der Abbildung.



Um festzustellen, ob der KFZ - Fahrer sich an die Geschwindigkeitsbegrenzung hält, wird per Radar die zu bestimmten Zeitpunkten zurückgelegte Strecke des Fahrzeugs gemessen. Hieraus sollen seine Geschwindigkeit und seine Anfangsposition geschätzt werden.



5.3.2 Beispiel (2)

Mit der Messgröße $y_k = s(t_k)$ folgt die Messgleichung

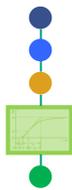
$$y_k = s(0) + v \cdot t_k = \begin{bmatrix} 1 & t_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(0) \\ v \end{bmatrix}$$
$$= \underline{u}_k^T \cdot \underline{\theta}.$$

Die Schätzparameter ergeben sich also zu

$$\left. \begin{array}{l} s(0) = \theta_1 \\ v = \theta_2 \end{array} \right\} \underline{\theta} = \begin{bmatrix} s(0) \\ v \end{bmatrix}.$$

Folgende diskrete Messwerte liegen vor:

Zeit t in sec	1	2	3	4	10	12	18
Strecke s in m	36	60	76	80	180	220	312



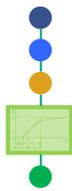
5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Beispiel (3)

Um den Einfluss der Parameter auf das rekursive Schätzverfahren zu diskutieren, werden folgende Ergebnisse herangezogen:

- LS-Schätzung in Blockverarbeitung: $\hat{s}(0) = 22.8 \text{ m}$; $\hat{v} = 16.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- rekursive LS-Schätzung:

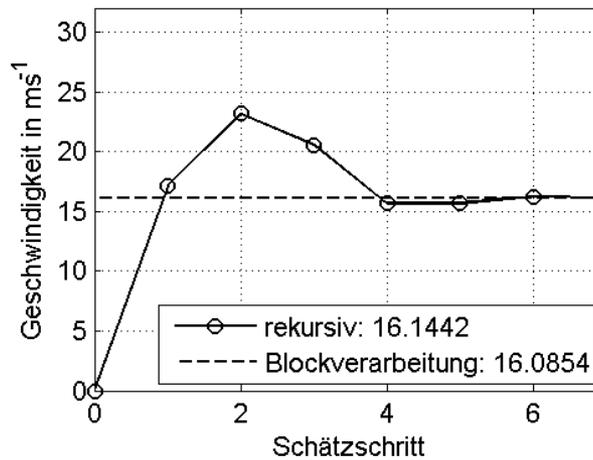
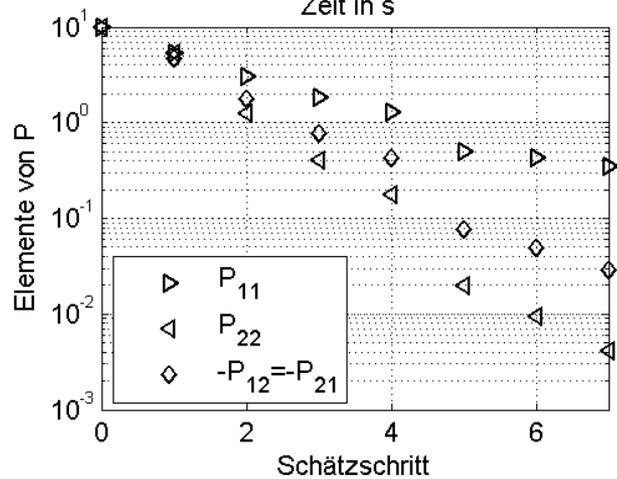
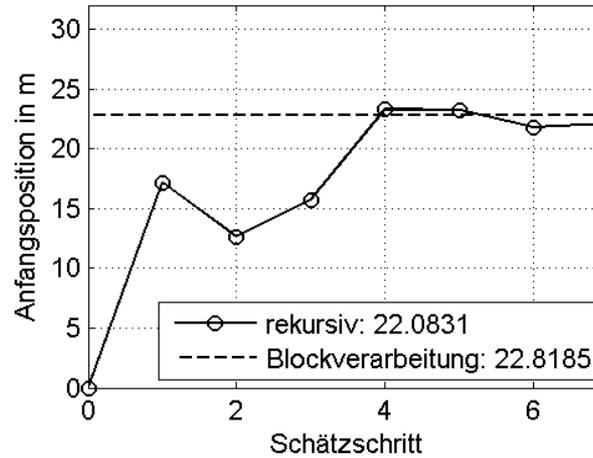
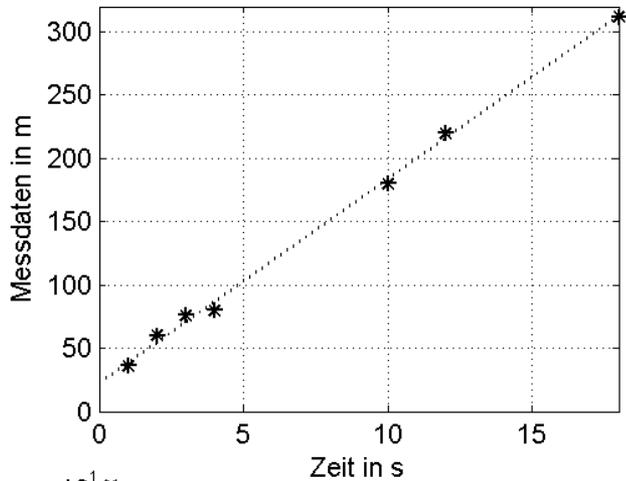
Schätzansatz	Anfangswerte	Ergebnisse
Schätzung (1) Keine weitere Information, daher Anfangswerte zu Null angenommen	$\hat{s}(0)_0 = 0$ $\hat{v}_0 = 0$ $\underline{P}_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	$\hat{s}(0) = 22.1$ $\hat{v} = 16.1$
Schätzung (2) Anfangswerte für $s(0)$ und v aus Schätzung (1)	$\hat{s}(0)_0 = 22.1$ $\hat{v}_0 = 16.1$ $\underline{P}_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	$\hat{s}(0) = 22.8$ $\hat{v} = 16.1$
Schätzung (3) Einfluss der Anfangswerte für \underline{P}	$\hat{s}(0)_0 = 0$ $\hat{v}_0 = 0$ $\underline{P}_0 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 10000 \end{bmatrix}$	$\hat{s}(0) = 22.8$ $\hat{v} = 16.1$

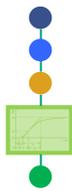


5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Beispiel (4)

■ Verläufe der Schätzung für den Fall (1) :

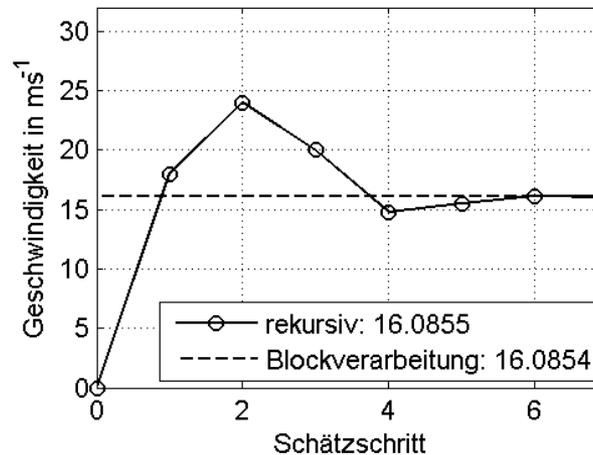
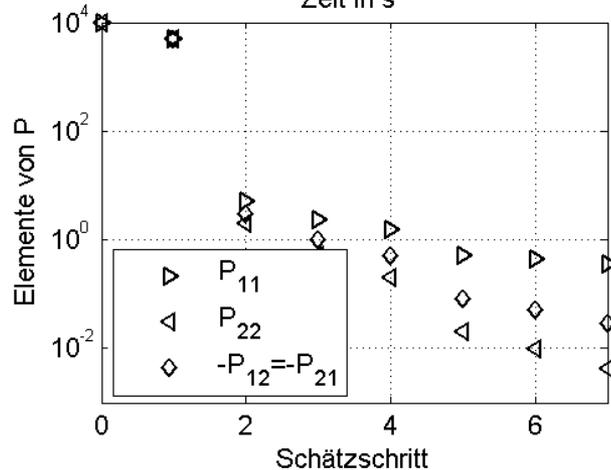
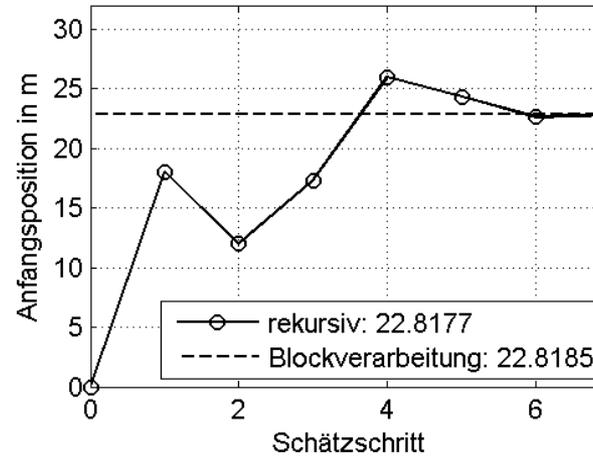
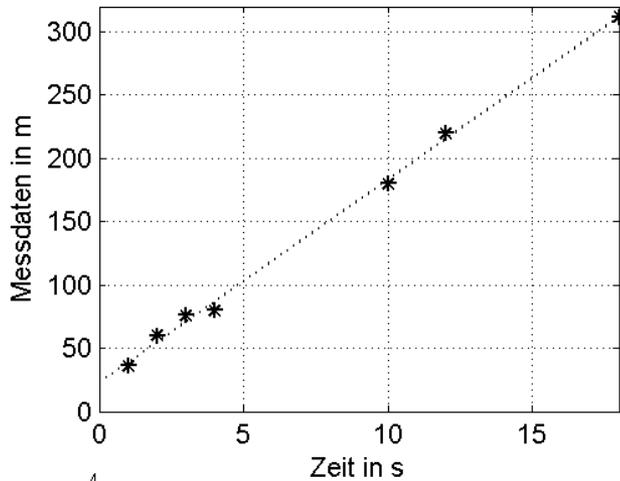


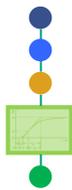


5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.2 Beispiel (5)

Verläufe der Schätzung für den Fall (3) :





Herleitung

$$\frac{dJ}{d\theta_M} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{wobei} \quad J = \underline{e}^T \underline{e}$$

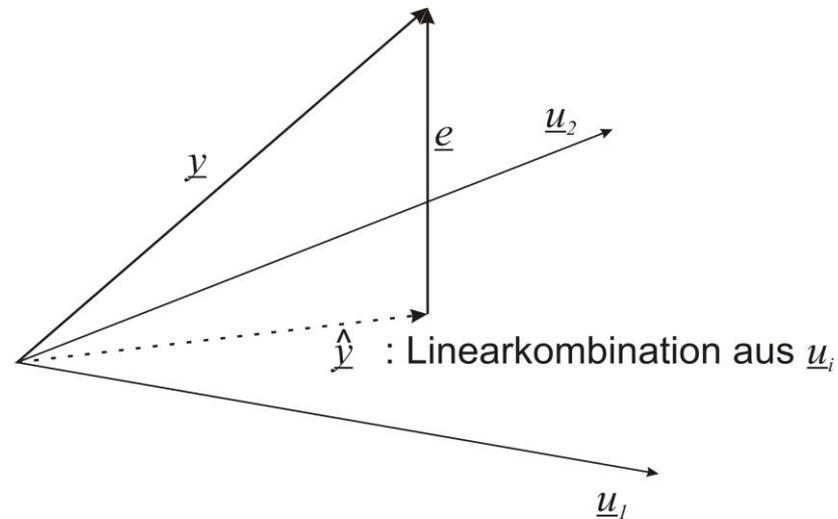
das Ergebnis der Blockverarbeitung

$$-\underline{U}^T \underline{y} + \underline{U}^T \underline{U} \underline{\theta} \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

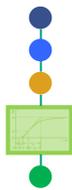
$$\text{oder} \quad \underline{U}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{y} - \underline{U} \underline{\theta} \\ \underline{y} \end{pmatrix}}_{\underline{e}} \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

$$\underline{U}^T \underline{e} \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

$$\underline{U} := \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_N^T \end{bmatrix}$$



also \underline{e} muss senkrecht auf den \underline{u}_i für $i = 1, \dots, N$ stehen.



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.4 LS-Verfahren für stoch. stat. Systeme: Regressionsanalyse (1)

bisher: rein deterministische Optimierung

jetzt: Einbeziehung stochastischer Eigenschaften der Schätzung bzw. der Störung

Ausgangspunkt:

Messgleichung: $y_k = \underline{u}_k^T \underline{\theta} + \varepsilon_k$

$$\underline{y} = \underline{U} \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$$

mit $\underline{\varepsilon}$ stochastischer Prozess

mit folgenden Eigenschaften:

α) Messrauschen ε_k sei mittelwertfrei und weiß

$$E\{\varepsilon_k\} = 0 \text{ und } E\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} = \sigma^2 \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & j = i \end{cases}$$

β) Messrauschen und Eingangssignal \underline{u}_k seien unkorreliert

$$E\{\underline{u}_k \varepsilon_j\} = \underline{0}$$



5.3

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.4

**LS-Verfahren für stoch. stat. Systeme:
Regressionsanalyse (2)**



5.3

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.4

**LS-Verfahren für stoch. stat. Systeme:
Regressionsanalyse (3)**



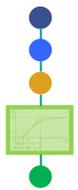
5.3

Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.4

LS-Verfahren für stoch. stat. Systeme:

Regressionsanalyse (4)



5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.4 LS-Verfahren für stoch. stat. Systeme: Regressionsanalyse (5)

Ergebnisse aus Herleitung:

$$\Rightarrow E\{\hat{\underline{\theta}}\} = \underline{\theta}$$

also erwartungstreu, falls α) und β) gilt.

Kovarianzmatrix des Schätzfehlers

$$E\{\tilde{\underline{\theta}}^T \tilde{\underline{\theta}}\} = \sigma^2 \underline{P}_N =: \underline{P}_N^*$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{k=1}^N e_k^2$$

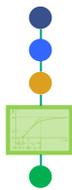
5.3.4 LS-Verfahren für stoch. stat. Systeme: Regressionsanalyse (6)

rekursiver LS-Algorithmus:

$$\underline{P}_i^* = \underline{P}_{i-1}^* - \underline{P}_{i-1}^* \underline{u}_i \left(\sigma^2 + \underline{u}_i^T \underline{P}_{i-1}^* \underline{u}_i \right)^{-1} \underline{u}_i^T \underline{P}_{i-1}^*$$

$$\underline{K}_i = \frac{\underline{P}_i^*}{\sigma^2} \underline{u}_i = \underline{P}_{i-1}^* \underline{u}_i \left(\sigma^2 + \underline{u}_i^T \underline{P}_{i-1}^* \underline{u}_i \right)^{-1}$$

$$\underline{\theta}_i = \underline{\theta}_{i-1} + \underline{K}_i \left[y_i - \underline{u}_i^T \underline{\theta}_{i-1} \right] \quad i = 1 \dots N$$



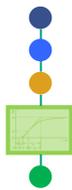
5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

5.3.4 Beispiel (6)

- Für die KFZ-Schätzung soll nun eine LS-Regressionsanalyse durchgeführt werden, die zusätzlich zu dem erwartungstreuen Schätzwert dessen Varianz liefert.
- Hierzu ist die Kenntnis der Varianz σ_ε^2 des Messrauschens erforderlich. Diese ist jedoch nicht bekannt und soll daher zunächst geschätzt werden.
- Ausgangspunkt hierfür ist eine erste KFZ-Parameter Schätzung

$$\underline{\hat{\theta}}_N = \underline{\hat{\theta}}_7 = \begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.8 \\ 16.1 \end{bmatrix}$$

aus einer Blockverarbeitung der Daten.



5.3.4 Beispiel (7)

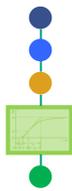
Mit dem Ausgangsfehler

$$\begin{aligned} e_k &= y_k - \underline{u}_k^T \underline{\theta}_N \\ &= s_k - [1 \quad t_k] \cdot \begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{v} \end{bmatrix} \\ &= s_k - (\hat{s}(0) + t_k \cdot \hat{v}) \end{aligned}$$

berechnet sich die Varianz zu

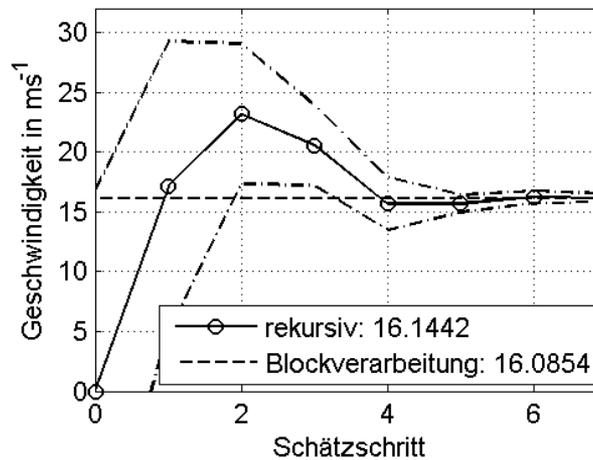
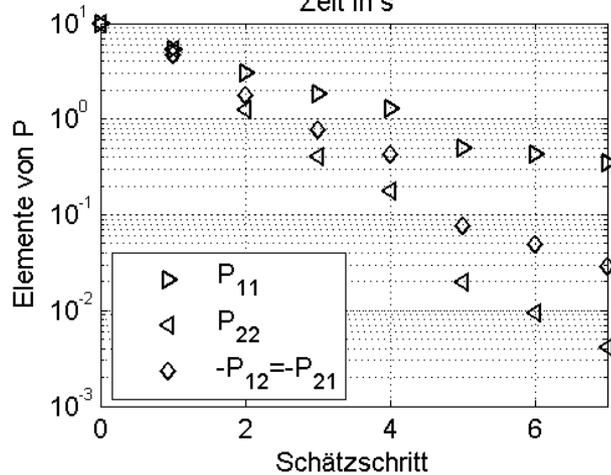
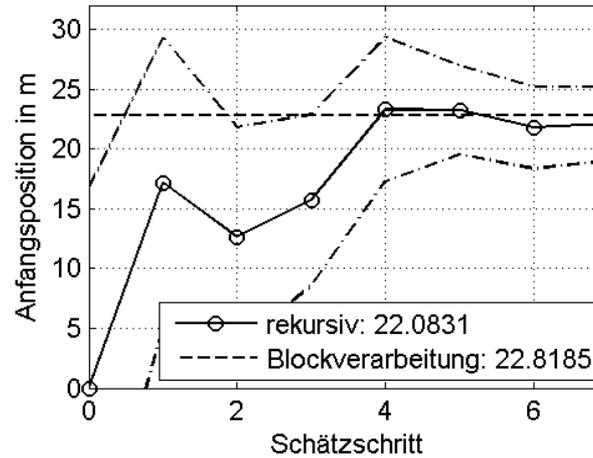
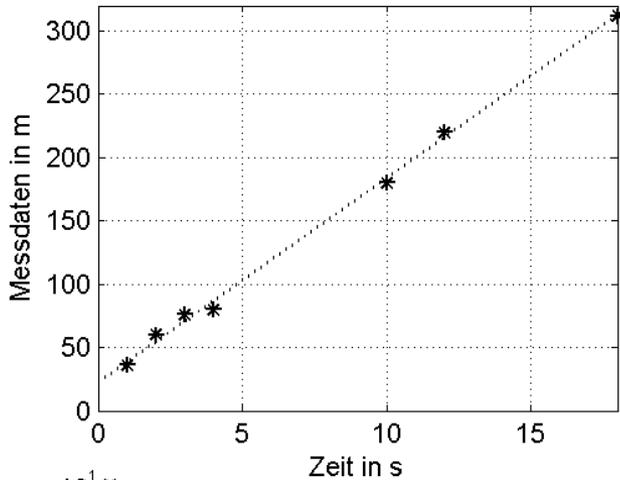
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^N e_k^2 \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^7 (s_k - (\hat{s}(0) + t_k \cdot \hat{v}))^2 \\ &= 28. \end{aligned}$$

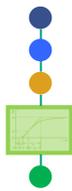
Bei der rekursiven LS-Regressionsanalyse für die KFZ-Schätzung ergeben sich dann die abgebildeten Verläufe.



5.3.4 Beispiel (8)

■ Verläufe der Schätzung für den Fall (1) :

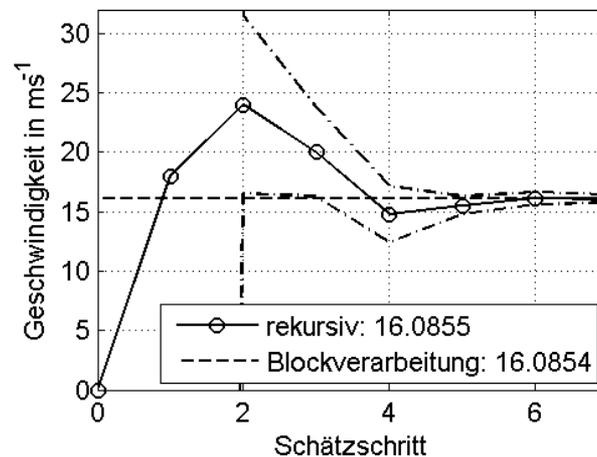
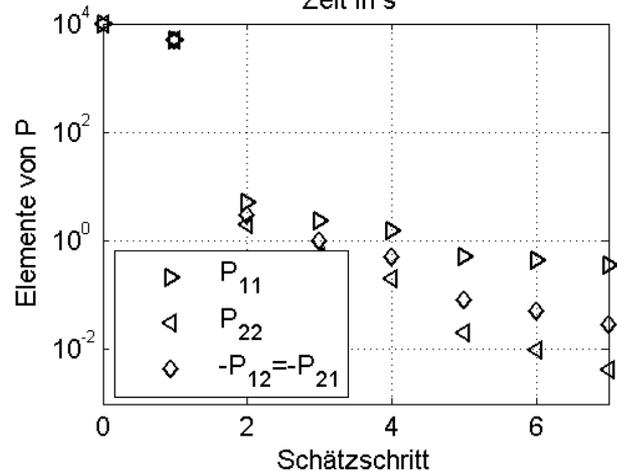
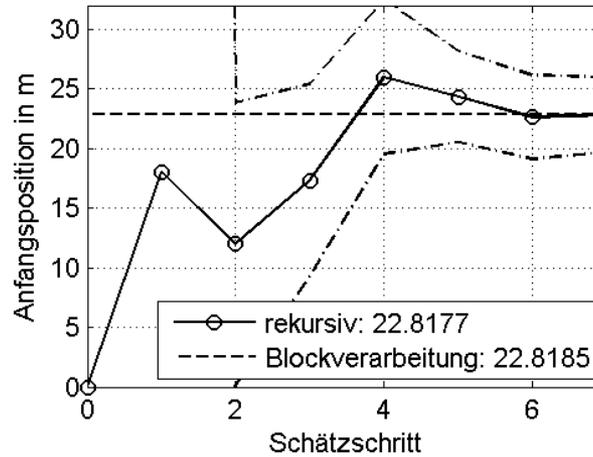
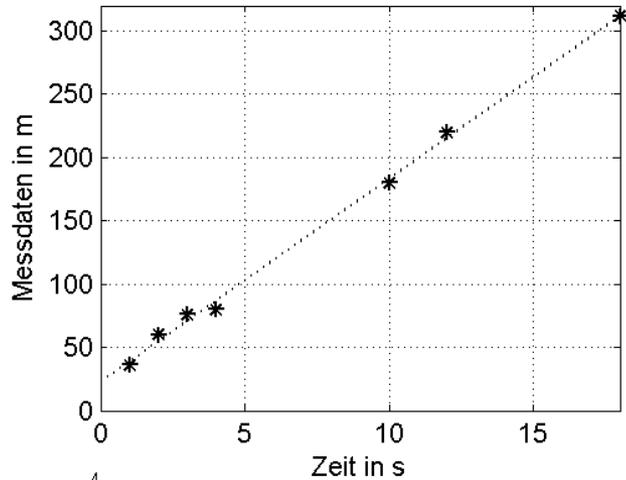




5.3 Least-Square-Verfahren für statische Prozesse

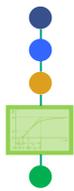
5.3.4 Beispiel (9)

■ Verläufe der Schätzung für den Fall (3) :



5.3.5 Zusammenfassung

statische Prozesse (p Parameter)	
Messgleichung:	$y_k = \underline{u}_k^T \cdot \underline{\theta} + \varepsilon_k \quad (k = 1, \dots, N)$
1. LS-Schätzung (det. Prozesse)	2. LS-Regressionsanalyse
Blockverarbeitung:	In den Schätzgleichungen \underline{P} ersetzen durch die Kovarianzmatrix \underline{P}^* gemäß
$\underline{P}_N = \left[\sum_{k=1}^N \underline{u}_k \underline{u}_k^T \right]^{-1} = \left[\underline{U}^T \underline{U} \right]^{-1}$ $\underline{b}_N = \sum_{k=1}^N \underline{u}_k y_k = \underline{U}^T \underline{y}$ $\hat{\underline{\theta}}_N = \underline{P}_N \underline{b}_N$	$\underline{P}^* = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \underline{P}$ <p>(σ_ε^2: Varianz des Messrauschens)</p> $\underline{P}_k^* = \underline{P}_{k-1}^* - \underline{P}_{k-1}^* \underline{u}_k \left[\sigma_\varepsilon^2 + \underline{u}_k^T \underline{P}_{k-1}^* \underline{u}_k \right]^{-1} \underline{u}_k^T \underline{P}_{k-1}^*$ $\underline{k}_k = \underline{P}_{k-1}^* \underline{u}_k \left[\sigma_\varepsilon^2 + \underline{u}_k^T \underline{P}_{k-1}^* \underline{u}_k \right]^{-1} = \frac{\underline{P}_{k-1}^* \underline{u}_k}{\sigma_\varepsilon^2}$
rekursive Verarbeitung:	bei ggf. unbekanntem Varianzen zusätzlich deren Schätzung erforderlich durch
$\underline{P}_k = \underline{P}_{k-1} - \underline{P}_{k-1} \underline{u}_k \left[1 + \underline{u}_k^T \underline{P}_{k-1} \underline{u}_k \right]^{-1} \underline{u}_k^T \underline{P}_{k-1}$ $\underline{k}_k = \underline{P}_{k-1} \underline{u}_k \left[1 + \underline{u}_k^T \underline{P}_{k-1} \underline{u}_k \right]^{-1} = \underline{P}_k \underline{u}_k$ $\hat{\underline{\theta}}_k = \hat{\underline{\theta}}_{k-1} + \underline{k}_k \left[y_k - \underline{u}_k^T \hat{\underline{\theta}}_{k-1} \right]$ <p style="text-align: right;">$(k = 1, \dots, N)$</p>	$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-p} \underline{e}^T \underline{e} = \frac{1}{N-p} \sum_{k=1}^N e_k^2$ <p>(e: Ausgangsfehler)</p>



5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

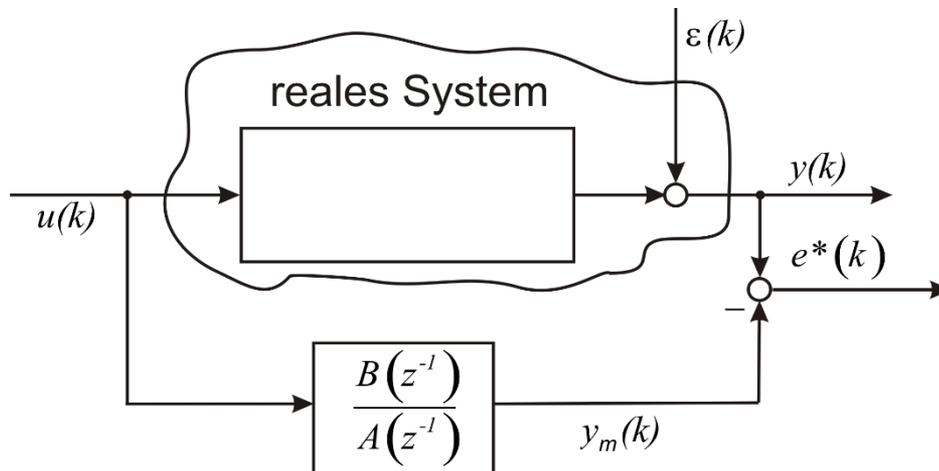
5.4.1 Schätzung der Parameter

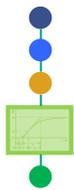
nun: **dynamisches** zeitdiskretes Modell

$$G_M(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{y_m(z^{-1})}{U(z^{-1})}$$

Ziel: LS-Schätzung der Parameter a_i, b_i aus N gemessenen Daten (E/A)

1. **Versuch:** Ausgangsfehler berechnen





5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

5.4.1 Schätzung der Parameter

$$\text{also: } E^*(z^{-1}) = y(z^{-1}) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z^{-1})$$

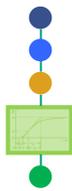


$$e^*(k) = y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) - (b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)) \\ - (a_1 e^*(k-1) + \dots + a_n e^*(k-n))$$

also enthält $e^*(k)$ Vergangenheitswerte mit $e^*(k-1)$, \dots , $e^*(k-n)$,
wenn die Rekursionsbeziehung aufgelöst wird.

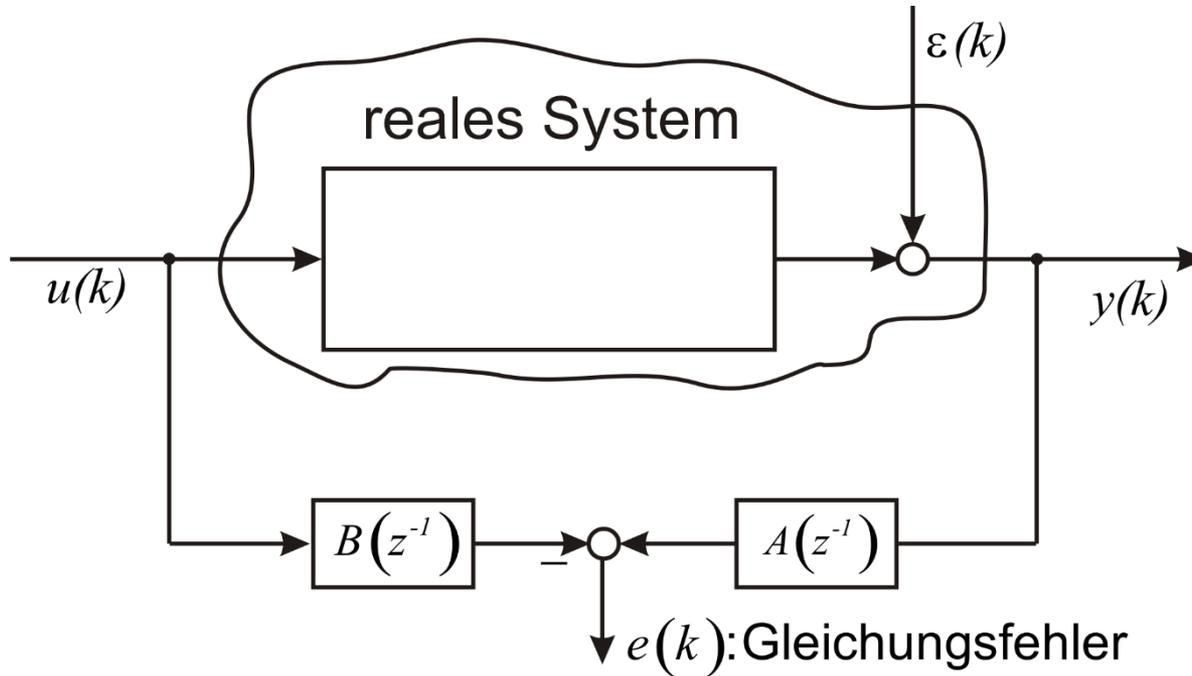
$\Rightarrow e^*(k)$ ist nichtlinear in den Parametern!

somit Voraussetzung für LS-Verfahren nicht erfüllt.



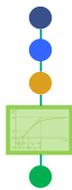
5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

5.4.2 Gleichungsfehler (1)



Zeitbereich:

$$e(k) = y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\ - b_1 u(k-1) - \dots - b_n u(k-n)$$

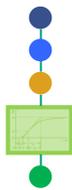


5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

5.4.2 Gleichungsfehler (2)

$$y(k) = \underbrace{\left[-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n) \right]}_{\substack{=: \underline{m}^T(k) \\ \text{Datenvektor}}} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + e(k)$$
$$= \underline{m}^T(k) \cdot \underline{\theta} + e(k)$$

Unterschied zu stat. Prozessen: in $\underline{m}^T(k)$ auch Ausgangsgrößen und Vergangenheitswerte enthalten.



5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

5.4.3 Direkte Lösung (1)

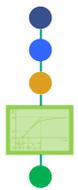
$$\begin{array}{c} \underline{y} \\ (N,1) \end{array} = \begin{array}{c} \underline{M} \\ (N,2n) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \underline{\theta} + \underline{e} \end{array} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{m}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{m}^T(n+N) \end{bmatrix}$$

Mit $N \geq 2n$ Anzahl der verwendeten Messungen

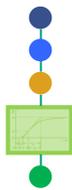
↓ analog zur Blockverarbeitung für stat. Systeme

$$\underline{\theta} = \left(\underline{M}^T \underline{M} \right)^{-1} \underline{M}^T \underline{y}$$

- Rekursive LS-Schätzung analoge Übertragung der Ergebnisse aus stat. Fall.



5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse
5.4.3 Direkte Lösung (2)



5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

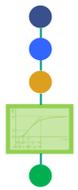
5.4.4 LS-Schätzung für dynamische Prozesse (1)

diskrete Korrelationsfunktionen (Blockverarbeitung):

Ausgangspunkt: Datenmatrix \underline{M} und Messvektor \underline{y} :

$$\underline{M}_{(N-n, 2n)} = \begin{bmatrix} \underline{m}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{m}^T(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & -y(n-1) & \cdots & -y(1) & u(n) & u(n-1) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & -y(n) & \cdots & -y(2) & u(n+1) & u(n) & \cdots & u(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & \cdots & -y(N-n) & u(N-1) & u(N-2) & \cdots & u(N-n) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \underline{y}_{(N-n, 1)} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$



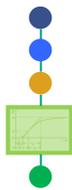
5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

5.4.4 LS-Schätzung für dynamische Prozesse (2)

Damit ergibt sich für die Produkte $\underline{M}^T \underline{M}$ und $\underline{M}^T \underline{y}$:

$$\underline{M}^T \underline{M} = \begin{bmatrix} \sum_{k=n}^{N-1} y^2(k) & \sum_{k=n}^{N-1} y(k) \cdot y(k-1) & \cdots & \sum_{k=n}^{N-1} y(k) \cdot y(k-n+1) & -\sum_{k=n}^{N-1} y(k) \cdot u(k) & -\sum_{k=n}^{N-1} y(k) \cdot u(k-1) & \cdots & -\sum_{k=n}^{N-1} y(k) \cdot u(k-n+1) \\ \sum_{k=n-1}^{N-2} y(k) \cdot y(k+1) & \sum_{k=n-1}^{N-2} y^2(k) & \cdots & \sum_{k=n-1}^{N-2} y(k) \cdot y(k-n+2) & -\sum_{k=n-1}^{N-2} y(k) \cdot u(k+1) & -\sum_{k=n-1}^{N-2} y(k) \cdot u(k) & \cdots & -\sum_{k=n-1}^{N-2} y(k) \cdot u(k-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-n} y(k) \cdot y(k+n-1) & \sum_{k=1}^{N-n} y(k) \cdot y(k+n-2) & \cdots & \sum_{k=1}^{N-n} y^2(k) & -\sum_{k=1}^{N-n} y(k) \cdot u(k+n-1) & -\sum_{k=1}^{N-n} y(k) \cdot u(k+n-2) & \cdots & -\sum_{k=1}^{N-n} y(k) \cdot u(k) \\ \hline -\sum_{k=n}^{N-1} u(k) \cdot y(k) & -\sum_{k=n}^{N-1} u(k) \cdot y(k-1) & \cdots & -\sum_{k=n}^{N-1} u(k) \cdot y(k-n+1) & \sum_{k=n}^{N-1} u^2(k) & \sum_{k=n}^{N-1} u(k) \cdot u(k-1) & \cdots & \sum_{k=n}^{N-1} u(k) \cdot u(k-n+1) \\ -\sum_{k=n-1}^{N-2} u(k) \cdot y(k+1) & -\sum_{k=n-1}^{N-2} u(k) \cdot y(k) & \cdots & -\sum_{k=n-1}^{N-2} u(k) \cdot y(k-n+2) & \sum_{k=n-1}^{N-2} u(k) \cdot u(k+1) & \sum_{k=n-1}^{N-2} u^2(k) & \cdots & \sum_{k=n-1}^{N-2} u(k) \cdot u(k-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{k=1}^{N-n} u(k) \cdot y(k+n-1) & -\sum_{k=1}^{N-n} u(k) \cdot y(k+n-2) & \cdots & -\sum_{k=1}^{N-n} u(k) \cdot y(k) & \sum_{k=1}^{N-n} u(k) \cdot u(k+n-1) & \sum_{k=1}^{N-n} u(k) \cdot u(k+n-2) & \cdots & \sum_{k=1}^{N-n} u^2(k) \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}^T \underline{y} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=n}^{N-1} y(k) \cdot y(k+1) & -\sum_{k=n-1}^{N-2} y(k) \cdot y(k+2) & \cdots & -\sum_{k=1}^{N-n} y(k) \cdot y(k+n) & \sum_{k=n}^{N-1} u(k) \cdot y(k+1) & \sum_{k=n-1}^{N-2} u(k) \cdot y(k+2) & \cdots & \sum_{k=1}^{N-n} u(k) \cdot y(k+n) \end{bmatrix}^T$$



5.4 Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

5.4.4 LS-Schätzung für dynamische Prozesse (3)

$\underline{M}^T \underline{y}$ und $\underline{M}^T \underline{M}$ lassen sich nun bei Verwendung vieler Messwerte (N sehr groß) mittels

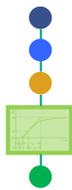
- Verwendung diskreter Korrelationsfunktionen:

$$r_{xx}(\tau) \approx \frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N x(k)x(k+\tau), \quad r_{xy}(\tau) \approx \frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N x(k)y(k+\tau)$$

- Vernachlässigung der unterschiedlichen Anfangs- u. Endglieder in den enthaltenen Summen

folgendermaßen annähern:

$$\underline{M}^T \underline{y} \approx (N-n) \left(\underline{M}^T \underline{y} \right)^* = (N-n) \begin{bmatrix} -r_{yy}(1) \\ -r_{yy}(2) \\ \vdots \\ -r_{yy}(n) \\ \hline r_{uy}(1) \\ r_{uy}(2) \\ \vdots \\ r_{uy}(n) \end{bmatrix}$$



5.4

Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse

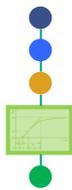
5.4.4

LS-Schätzung für dynamische Prozesse (4)

$$\underline{M}^T \underline{M} \approx (N-n) \left(\underline{M}^T \underline{M} \right)^* = (N-n) \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) & \cdots & r_{yy}(n-1) & | & -r_{yu}(0) & -r_{yu}(-1) & \cdots & -r_{yu}(-n+1) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) & \cdots & r_{yy}(n-2) & | & -r_{yu}(1) & -r_{yu}(0) & \cdots & -r_{yu}(-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(n-1) & r_{yy}(n-2) & \cdots & r_{yy}(0) & | & -r_{yu}(n-1) & -r_{yu}(n-2) & \cdots & -r_{yu}(0) \\ \hline -r_{uy}(0) & -r_{uy}(-1) & \cdots & -r_{uy}(-n+1) & | & r_{uu}(0) & r_{uu}(1) & \cdots & r_{uu}(n-1) \\ -r_{uy}(1) & -r_{uy}(0) & \cdots & -r_{uy}(-n+2) & | & r_{uu}(1) & r_{uu}(0) & \cdots & r_{uu}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{uy}(n-1) & -r_{uy}(n-2) & \cdots & -r_{uy}(0) & | & r_{uu}(n-1) & r_{uu}(n-2) & \cdots & r_{uu}(0) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt für den Schätzwert zum Zeitpunkt $k=N$ mit allen vorhandenen Messwerten:

$$\hat{\Theta}(k=N) = \left(\underline{M}^T \underline{M} \right)^{-1} \underline{M}^T \underline{y} \approx \frac{1}{N-n} \left(\underline{M}^T \underline{M} \right)^{* -1} (N-n) \left(\underline{M}^T \underline{y} \right)^* = \left(\underline{M}^T \underline{M} \right)^{* -1} \left(\underline{M}^T \underline{y} \right)^*$$



dynamische Prozesse (2n Parameter)

Messgleichung:

$$y_k = \underline{m}_k^T \underline{\theta} + e_k \quad (k = n+1, \dots, N)$$

1. LS-Schätzung

2. LS-Regressionsanalyse

in den Schätzgleichungen \underline{P} ersetzen durch die Kovarianzmatrix \underline{P}^* gemäß

Blockverarbeitung:

Voraussetzung: Schätzung erwartungstreu

$$\underline{P}_N = \left[\sum_{k=n+1}^N \underline{m}_k \underline{m}_k^T \right]^{-1} = \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1}$$

$$\underline{P}^* = \sigma_v^2 \cdot \underline{P} \quad (\sigma_v^2 : \text{Varianz des weißen Rauschens})$$

$$\underline{b}_N = \sum_{k=n+1}^N \underline{m}_k y_k = \underline{M}^T \underline{y}$$

$$\underline{P}_k^* = \underline{P}_{k-1}^* - \underline{P}_{k-1}^* \underline{m}_k \left[\sigma_v^2 + \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1}^* \underline{m}_k \right]^{-1} \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1}^*$$

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \underline{P}_N \underline{b}_N$$

$$\underline{k}_k = \underline{P}_{k-1}^* \underline{m}_k \left[\sigma_v^2 + \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1}^* \underline{m}_k \right]^{-1} = \frac{\underline{P}_{k-1}^* \underline{m}_k}{\sigma_v^2 + \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1}^* \underline{m}_k}$$

rekursive Verarbeitung:

bei ggf. unbekanntem Varianzen zusätzlich deren Schätzung erforderlich durch

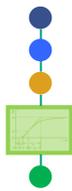
$$\underline{P}_k = \underline{P}_{k-1} - \underline{P}_{k-1} \underline{m}_k \left[1 + \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1} \underline{m}_k \right]^{-1} \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{N-2n} \underline{e}^T \underline{e} = \frac{1}{N-2n} \sum_{k=n+1}^N e_k^2$$

$$\underline{k}_k = \underline{P}_{k-1} \underline{m}_k \left[1 + \underline{m}_k^T \underline{P}_{k-1} \underline{m}_k \right]^{-1} = \underline{P}_{k-1} \underline{m}_k$$

(e : Gleichungsfehler)

$$\hat{\underline{\theta}}_k = \hat{\underline{\theta}}_{k-1} + \underline{k}_k \left[y_k - \underline{m}_k^T \hat{\underline{\theta}}_{k-1} \right] \quad (k = n+1, \dots, N)$$

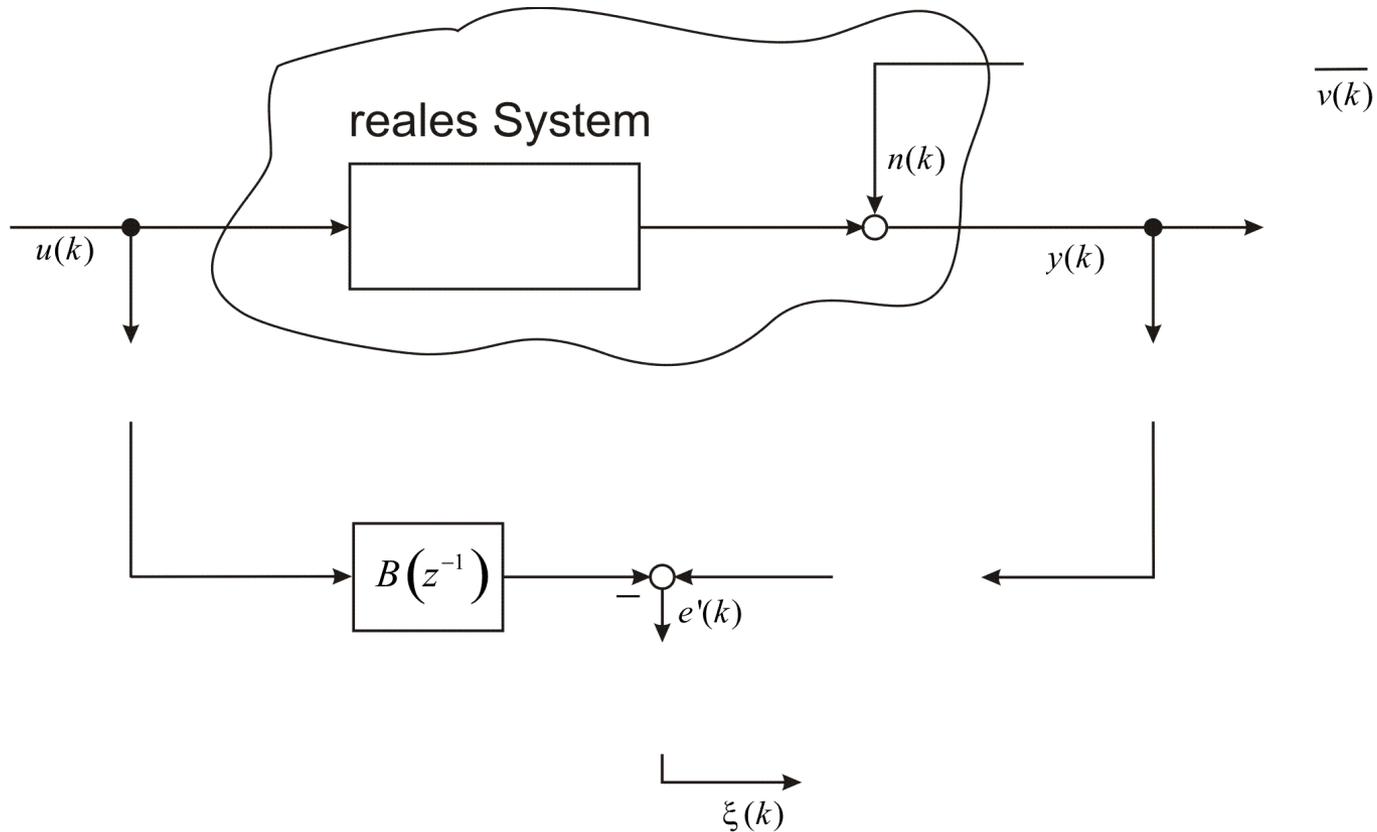


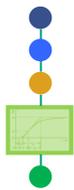
5.5

GLS-Methode

5.5.1

Generalized-Least-Square-Verfahren für dyn. Prozesse (1)





5.6 Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

5.6.1 Grundidee und Vorgehen (1)

Ziel: biasfreie Schätzung

Prinzip: LS-Schätzung unter Verwendung sog. **Hilfsvariablen (Instrumental Variables)** in Form einer Matrix \underline{W} mit folgenden Eigenschaften:

1. $E\{\underline{W}^T \underline{e}\} = \underline{0}$

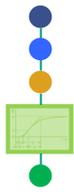
2. $E\{\underline{W}^T \underline{M}\}$ positiv definit

$\Rightarrow \underline{W}^T \underline{M}$ regulär (ohne Beweis)

Schätzwertberechnung:

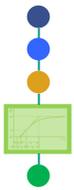
Ausgangspunkt: Messgleichung

$$\underline{y} = \underline{M}\underline{\theta} + \underline{e}$$



5.6 Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

5.6.1 Grundidee und Vorgehen (2)



5.6 Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

5.6.4 Wahl der Hilfsvariablen

aus (1) und (2) folgt:

- \underline{W} möglichst unkorreliert mit der Störung
- \underline{W} möglichst stark korreliert mit der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße

Die Hilfsvariablen werden zusammengesetzt aus Eingangs- und geschätzten Ausgangssignalen eines Hilfsmodells des ungestörten Prozesses.

$$\underline{W}_{(N-n, 2n)} = \begin{bmatrix} \underline{w}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{w}^T(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{y}_u(n) & -\hat{y}_u(n-1) & \dots & \dots \\ -\hat{y}_u(n+1) & -\hat{y}_u(n) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\hat{y}_u(N-1) & -\hat{y}_u(N-2) & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}_u(k) = -\hat{y}_u(k-1)\hat{a}_1 - \dots - \hat{y}_u(k-n)\hat{a}_n + \hat{b}_1 u(k-1) + \dots + \hat{b}_n u(k-n) \quad (2)$$

5.6 Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

5.6.5 Ablauf der Schätzung (1)

1 Schätzung des Hilfsmodells

$$\underline{\theta}_1 = \left(\underline{M}^T \underline{M} \right)^{-1} \underline{M}^T \underline{y} \quad (\Rightarrow \text{Schätzung ist biasbehaftet})$$

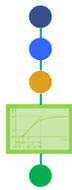
2 IV-Bestimmung

- Ermittlung von $y_u(k)$ aus $\underline{\theta}_1$ gemäß (2)
- \underline{W} gemäß (1)

3 Schätzung

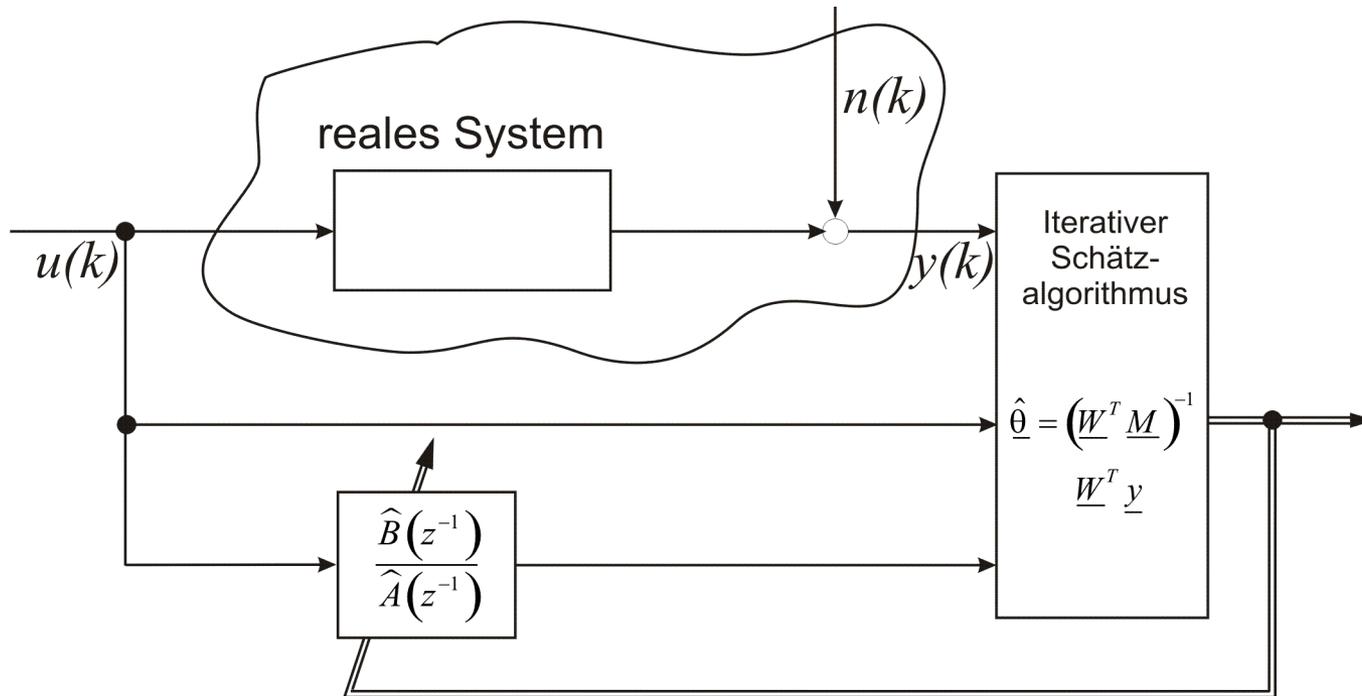
$$\underline{\theta}_2 = \left(\underline{W}^T \underline{M} \right)^{-1} \underline{W}^T \underline{y}$$

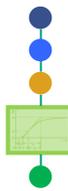
4 Wiederholung von 2 - 3 bis $\left\| \underline{\theta}_i - \underline{\theta}_{i-1} \right\|$ klein ist.



5.6 Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

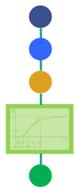
5.6.5 Ablauf der Schätzung (2)





5.6 Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

5.6.6 Demo zur IV-Methode



5.7

Nichtlineare Methoden

